ANALIZA FUNKCJONALNA
LISTA 2

1. Który z podanych funkcjonałów na $\mathbb{R}^2$ jest normą?

   (a) $F(x) = \sqrt{2x_1^2 + 3x_2^2}$
   (b) $F(x) = |x_1 + x_2|$
   (c) $F(x) = |2x_1| + |x_2|$
   (d) $F(x) = x_1^2 + x_2^2$
   (e) $F(x) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$
   (f) $F(x) = \max\{|x_1|, x_2\}$

2. Uzasadnić, że funkcjonał na przestrzeni $C[a, b]$ zadany wzorem

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$$

   jest normą.

3. Uzasadnić, że funkcjonał na przestrzeni $L^\infty(X, \mu)$ funkcji istotnie ograniczonych na przestrzeni miarowej (X, μ) zadany wzorem

$$\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|,$$

   jest normą.

4. Wykazać, znajdując odpowiedni kontrprzykład (można wybrać przestrzeń $\mathbb{R}^2$), że minimum z dwóch norm na przestrzeni liniowej nie musi być normą. Czy maksimum dwóch norm jest zawsze normą?

5. Niech $X = C^1[a, b]$ będzie przestrzenią funkcji rzeczywistych lub zespolonych, które mają na $[a, b]$ ciągłą pochodną. Czy funkcjonały

   (a) $F(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$,
   (b) $F(f) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$,

   są normami na X?

6. Uzasadnić, że funkcjonał na przestrzeni macierzy $M_{m,n}(\mathbb{C})$ zadany wzorem

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i,j} |a_{i,j}|^2} = \sqrt{\operatorname{Tr}(A^*A)}$$

   jest normą (tzw. *norma Frobeniusa*), gdzie A^* jest sprzężeniem hermitowskim A, natomiast $\operatorname{Tr}(B) = \sum_i b_{i,i}$ jest *śladem* macierzy kwadratowej B.

7. Pokazać, że funkcjonał na przestrzeni macierzy $M_{m,n}(\mathbb{C})$ zadany wzorem

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\}$$

gdzie $\|x\|$ jest dowolną normą wektora $x \in \mathbb{C}^n$, jest normą na tej przestrzeni (tzw. *norma operatorowa* A indukowana przez normę wektora x).

8. Dla przypadku gdy $\|x\| = \|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|$, pokazać, że norma operatorowa macierzy A przyjmuje postać

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|$$

9. Dla przypadku gdy $\|x\| = \|x\|_\infty = \max_{1\leq j\leq n} |x_j|$, pokazać, że norma operatorowa macierzy A przyjmuje postać

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

10. Pokazać, że w liniowej przestrzeni unormowanej
    (a) ciąg zbieżny ma jednoznacznie wyznaczoną granicę,
    (b) jeżeli $x_n \to x$ oraz $y_n \to y$, to $x_n + y_n \to x + y$,
    (c) jeżeli $x_n \to x$ oraz $\lambda_n \to \lambda$, to $\lambda_n x_n \to \lambda x$.

11. Pokazać, że w liniowej przestrzeni unormowanej zachodzi nierówność

$$\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$$

12. Dwie normy, $x \to \|x\|_1$ oraz $x \to \|x\|_2$ w tej samej przestrzeni liniowej X są *równoważne*, jeżeli zachodzi równoważność:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\|_1 = 0 \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_2 = 0$$

dla dowolnego ciągu (x_n) w X. Pokazać, że dwie normy na przestrzeni liniowej X są równoważne wtedy i tylko wtedy gdy istnieją liczby dodatnie α, β takie że

$$\alpha\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta\|x\|_1$$

dla dowolnego $x \in X$.

13. Podać przykład przestrzeni liniowej i określonych w niej dwóch nierównoważnych norm.

R. Lenczewski